

5-7 класс

Задача 7.1.(6.1) Который час?

Сутки в Древнем Египте делились на часы следующим образом: время от рассвета до заката делилось на 12 равных дневных часов, а время от заката до рассвета — на 12 равных ночных часов. Продолжительность дневного и ночного часа, как следствие, зависела от конкретной даты измерения. В одном из древних папирусов было сказано, что некоторая важная церемония началась через два часа (дневных) после рассвета, а закончилась через час (ночной) после заката. К сожалению, точная дата этой церемонии стёрлась от времени. Найдите минимальную и максимальную продолжительность (в современных часах) этой церемонии.

Примечание: Самый длинный день начинается (в Египте) в 5:00 и заканчивается в 19:00. Самый короткий день, соответственно, начинается в 7:00 и заканчивается в 17:00.

Ответ: Минимальная продолжительность — 9,5 ч, максимальная — 12,5 ч.

Решение: Согласно папирусу, церемония длилась 10 дневных часов и 1 ночной час. Продолжительность самого короткого дня составляет 10 современных часов. Таким образом, 1 дневной час в этом случае равен $10/12$ современного, а ночной — $14/12$ современного. Общая продолжительность церемонии составляет

$$t_{\text{мин}} = 10 \times \frac{10}{12} \text{ ч} + \frac{14}{12} \text{ ч} = 114/12 \text{ ч} = 9,5 \text{ ч}.$$

Продолжительность самого длинного дня составляет 14 современных часов. Соответственно, 1 дневной час в этом случае равен $14/12$ современного, а ночной — $10/12$ современного. Общая продолжительность церемонии теперь составляет

$$t_{\text{макс}} = 10 \times \frac{14}{12} \text{ ч} + \frac{10}{12} \text{ ч} = 150/12 \text{ ч} = 12,5 \text{ ч}.$$

Таким образом, минимальная продолжительность церемонии равна 9,5 ч, а максимальная — 12,5 ч.

Критерии:

- Найдена продолжительность дневного и ночного часа для самого короткого дня 2 балла
- Найдена продолжительность дневного и ночного часа для самого длинного дня 2 балла
- Найдена минимальная продолжительность церемонии 3 балла
- Найдена максимальная продолжительность церемонии 3 балла

Задача 7.2.(6.2) Газонокосильщики.

Известно, что газон футбольного поля один опытный рабочий обычно стрижёт за 8 часов. Как-то раз, накануне открытия сезона, потребовалось срочно постричь газон. Для ускорения процесса в пару к опытному рабочему придали ещё одного, молодого, который стрижёт вдвое медленнее. Однако оказалось, что косилка у молодого рабочего была неисправна, поэтому он смог начать работу только через час после опытного коллеги. Сколько времени в общей сложности им потребовалось, чтобы выполнить задание?

Ответ: 5 ч 40 мин.

Решение: Пусть S — площадь футбольного поля. Тогда скорость, с которой работает опытный рабочий равна $v_1 = S/(8 \text{ ч})$. Молодой рабочий стрижёт вдвое медленнее, то есть со скоростью $v_2 = S/(16 \text{ ч})$. Первый час опытный рабочий работал один и постриг площадь, равную $S/(8 \text{ ч}) \cdot 1 \text{ ч} = S/8$. Оставшиеся $7S/8$ они стригли вдвоём со скоростью $v_1 + v_2 = 3S/(16 \text{ ч})$. Время, которое у них на это ушло, равно

$$t = \frac{7S/8}{3S/(16 \text{ ч})} = \frac{14}{3} \text{ ч} = 4 \text{ ч} 40 \text{ мин}.$$

Следовательно, общее время выполнения всей работы $1 \text{ ч} + 4 \text{ ч} 40 \text{ мин} = 5 \text{ ч} 40 \text{ мин}$.

Критерии:

Записаны выражения для скоростей газонокосильщиков	2 балла
Найдена площадь, постиженная опытным рабочим в одиночку	2 балла
Найдено время совместной работы	4 балла
Найдено общее время работы	2 балла

Задача 7.3.(6.3) Восток — дело тонкое!

В Японии существовала единица измерения больших объёмов, называемая «коку». Так, например, считалось, что одного коку риса должно хватить на год для пропитания взрослому человеку. В японской системе мер 1 коку состоял из 100 сё, а 1 сё соответствовал объёму ящика, длина и ширина которого равны 49 бу, а высота — 27 бу. Определите объём одного коку в литрах, если 1 м равен 330 бу.

Ответ: ≈ 180 л.

Решение: Один бу равен $1/330$ м или $1/33$ дм. Найдём объём в литрах одного сё:

$$1 \text{ сё} = \frac{49}{33} \cdot \frac{49}{33} \cdot \frac{27}{33} \text{ дм}^3 = \frac{64827}{35937} \text{ дм}^3 \approx 1,8 \text{ дм}^3 \text{ или } 1,8 \text{ л.}$$

Соответственно,

$$1 \text{ коку} = 100 \text{ сё} \approx 180 \text{ л.}$$

Критерии:

Бу переведён в систему СИ	2 балла
Использована правильная формула для объёма 1 сё	2 балла
Найдён объём 1 сё	4 балла
Найдён объём 1 коку	2 балла

Задача 7.4. Челночный бег.

Во время уборки школьной территории двое школьников понесли носилки с мусором. В это время вдоль них стал туда-сюда бегать маленький котёнок. Когда котёнок бежит навстречу ребятам, он пробегает мимо них в 1,5 раза быстрее, чем при движении в противоположном направлении. Какова скорость котёнка, если школьники идут со скоростью 0,7 м/с? Скорость котёнка одинакова в обоих случаях. Размерами котёнка можно пренебречь.

Ответ: 3,5 м/с.

Решение: Пусть L — расстояние между школьниками, u — скорость школьников, а v — скорость котёнка. Двигаясь навстречу школьникам, котёнок пробегает мимо них за время $t_1 = L/(v + u)$, а двигаясь в обратном направлении — за время $t_2 = L/(v - u)$. Так как $t_2 = 1,5t_1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{L}{v - u} = \frac{1,5L}{v + u} &\Rightarrow v + u = 1,5(v - u) \Rightarrow 2,5u = 0,5v \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = 5u = 5 \cdot 0,7 \text{ м/с} = 3,5 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Критерии:

Записано выражение для времени t_1	3 балла
Записано выражение для времени t_2	3 балла
Записано, что $t_2 = 1,5t_1$	1 балл
Найдена скорость котёнка	3 балла

Максимально возможный балл в 5-6 классе	30
Максимально возможный балл в 7 классе	40

8 класс

Задача 8.1. Как я провёл лето.

Как-то летом, находясь в отпуске, Василий поехал на своём автомобиле к морю. Дорога шла через горный перевал. Подъём занял первую треть пути, и автомобиль двигался на этом участке со скоростью 24 км/ч. Затем одну шестую всего пути дорога была ровной, а оставшуюся часть пути она спускалась к морю. С какой скоростью автомобиль двигался на ровном участке, если он спускался со скоростью 750 м/мин, а его средняя скорость на всём пути составила 10 м/с?

Ответ: 60 км/ч.

Решение: Пусть s — длина пути, пройденного Василием. Тогда $s_1 = s/3$ — длина первого участка, $s_2 = s/6$ — длина второго. Длина третьего участка, соответственно, составляет

$$s_3 = s - \frac{s}{3} - \frac{s}{6} = \frac{s}{2}.$$

Время, потраченное на каждом участке и на всём пути, равно, соответственно,

$$t_1 = \frac{s/3}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s/6}{v_2}, \quad t_3 = \frac{s/2}{v_3}, \quad t = \frac{s}{v_{\text{cp}}}.$$

Так как $t_2 = t - t_1 - t_3$, получаем, что

$$\frac{s/6}{v_2} = \frac{s}{v_{\text{cp}}} - \frac{s/3}{v_1} - \frac{s/2}{v_3} \Rightarrow \frac{1}{v_2} = \frac{6}{v_{\text{cp}}} - \frac{2}{v_1} - \frac{3}{v_3} = \frac{6}{36 \text{ км/ч}} - \frac{2}{24 \text{ км/ч}} - \frac{3}{45 \text{ км/ч}} = \frac{1}{60 \text{ км/ч}}.$$

Отсюда, $v_2 = 60$ км/ч.

Критерии:

Правильно сделан перевод к одним единицам измерения для всех скоростей	1 балл
Записаны выражения для s_1, s_2, s_3	1 балл
Записаны выражения для t_1, t_2, t_3	2 балла
Записано равенство $s = v_{\text{cp}}t$ или его аналог	2 балла
Записано уравнение для поиска v_2	2 балла
Найдено значение v_2	2 балла

Задача 8.2. Эксперименты с динамометром.

На крюке динамометра висят скрепленные друг с другом два тела одинаковой массы — алюминиевое (сверху) и медное (снизу). Если нижнее тело полностью погружено в керосин, динамометр показывает 6,8 Н. Определите массы обоих тел. Что покажет динамометр, если оба тела полностью погрузить в керосин? Плотность алюминия равна 2700 кг/м³, меди — 8900 кг/м³, керосина — 800 кг/м³. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 356 г, 5,7 Н.

Решение: Пусть m — масса одного тела. Тогда $V_1 = m/\rho_{\text{ал}}$ — объём алюминиевого тела, а $V_2 = m/\rho_{\text{м}}$ — объём медного. Динамометр показывает общий вес системы в керосине. В первом случае он равен

$$P_1 = 2mg - \rho_{\text{к}}gV_2 = 2mg - \rho_{\text{к}}g \cdot \frac{m}{\rho_{\text{м}}} = mg \left(2 - \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{м}}} \right) = mg \left(2 - \frac{800 \text{ кг/м}^3}{8900 \text{ кг/м}^3} \right) = \frac{170}{89} mg.$$

Отсюда находим массу m :

$$m = \frac{89P_1}{170g} = \frac{89 \cdot 6,8 \text{ Н}}{170 \cdot 10 \text{ Н/кг}} = 0,356 \text{ кг} = 356 \text{ г}.$$

Если в керосин погрузить оба груза, то динамометр покажет

$$P_2 = 2mg - \rho_{\text{к}}g(V_1 + V_2) = mg \left(2 - \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{ал}}} - \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{м}}} \right) =$$

$$= 0,356 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot \left(2 - \frac{800 \text{ кг/м}^3}{2700 \text{ кг/м}^3} - \frac{800 \text{ кг/м}^3}{8900 \text{ кг/м}^3} \right) \approx 5,7 \text{ Н}.$$

Критерии:

Записаны выражения для объёмов обоих тел	1 балл
Записано выражение для веса в первом случае	2 балла
Записано выражение для веса во втором случае	2 балла
Найдено значение m	2 балла
Найдено значение P_2	3 балла

Задача 8.3. Эх, ухнем!

Рабочий Василий должен поднять груз массой 100 кг на высоту 1,2 м, используя для этого пологую наклонную плоскость — пандус. Сколько времени займёт весь подъём, если Василий тянет груз с силой, равной 250 Н, прикладывая её вдоль поверхности пандуса? Коэффициент полезного действия пандуса равен 30%, а груз перемещается со скоростью 6 м/мин? Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 160 с.

Решение: Полезная работа по подъёму груза равна $A_{\text{пол}} = mgh = 100 \text{ кг} \cdot 10 \text{ Н/кг} \cdot 1,2 \text{ м} = 1200 \text{ Дж}$. Работа, совершённая Василием равна $A_{\text{сов}} = A_{\text{пол}}/0,3 = 4000 \text{ Дж}$. С другой стороны, $A_{\text{сов}} = Fvt$, где F — сила, которую прикладывает рабочий, v — скорость перемещения груза, а t — время перемещения. Отсюда

$$t = \frac{A_{\text{сов}}}{Fv} = \frac{4000 \text{ Дж}}{250 \text{ Н} \cdot 0,1 \text{ м/с}} = 160 \text{ с}.$$

Критерии:

Записано выражение для $A_{\text{пол}}$	2 балла
Записано выражение для $A_{\text{сов}}$	2 балла
Связь между $A_{\text{пол}}$ и $A_{\text{сов}}$ через КПД	2 балла
Найдено время движения	4 балла

Задача 8.4. Больше или меньше?

В цилиндрическом сосуде находится вертикальный ледяной цилиндр, вокруг которого налита вода (рис. 8.1). Высота слоя воды равна 10 см, высота ледяного цилиндра — 20 см, а площадь основания цилиндра в четыре раза меньше площади дна сосуда. Как и насколько изменится давление воды на дно сосуда, если весь лёд растает? Вода из сосуда не выливается. Плотность льда равна 900 кг/м³, плотность воды — 1000 кг/м³. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: Увеличится на 200 Па.

Решение: Пусть S — площадь основания цилиндра, а $h = 10 \text{ см}$ — первоначальная высота слоя воды. Тогда площадь дна сосуда равна $4S$, а высота цилиндра — $2h$. Начальный объём воды равен $V_0 = (4S - S)h = 3Sh$, а масса льда $m = \rho_{\text{л}}S \cdot 2h$. Когда лёд растает, объём получившейся из него воды станет равен $V = m/\rho_{\text{в}} = 1,8Sh$. Общий объём воды тогда составит

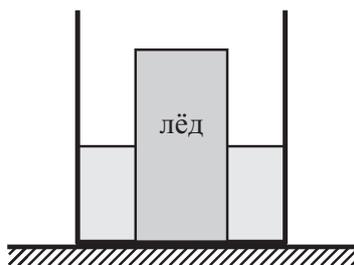


Рис. 8.1.

$V_0 + V = 4,8Sh$, а высота слоя воды, соответственно, будет равна $h' = (V_0 + V)/(4S) = 1,2h$. Так как высота увеличилась, то и давление воды на дно возрастёт. Изменение давления равно

$$\Delta p = \rho_{\text{в}}g \cdot 1,2h - \rho_{\text{в}}gh = 0,2\rho_{\text{в}}gh = 0,2 \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ Н/кг} \cdot 0,1 \text{ м} = 200 \text{ Па}.$$

Критерии:

Записано выражение для начального объёма воды	1 балл
Записано выражение для массы льда	1 балл
Найден объём воды, получившейся при таянии льда	2 балла
Найдена итоговая высота слоя воды	3 балла
Сделан вывод, возрастает или убывает давление	1 балл
Найдено изменение давления воды	2 балла
Максимально возможный балл в 8 классе		40

9 класс

Задача 9.1. Часы-реостат.

Для проекта по технологии мальчик Паша изготовил «часы-реостат». На пластиковом основании он закрепил непроводящее электричество кольцо (на рис. 9.1 закрашено серым цветом), намотал на него витки проволоки, а в центре кольца поместил часовой механизм с парой металлических стрелок таким образом, что стрелки во время движения скользят по проволоке. Затем он нарисовал циферблат и прикрепил к проволоке напротив цифр «3» и «9» электрические провода для подключения измерительных приборов (см. рис. 9.1). В результате своих измерений Паша выяснил, что, когда часы показывают 6:00, сопротивление реостата равно 30 Ом. Каково станет сопротивление реостата, когда часы покажут 10:30? Сопротивлением стрелок и проводов можно пренебречь. Проволока на кольцо намотана плотно, а каждый виток отделён от соседних изоляцией.

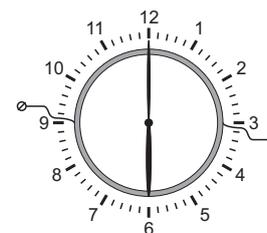


Рис. 9.1.

Ответ: 28 Ом.

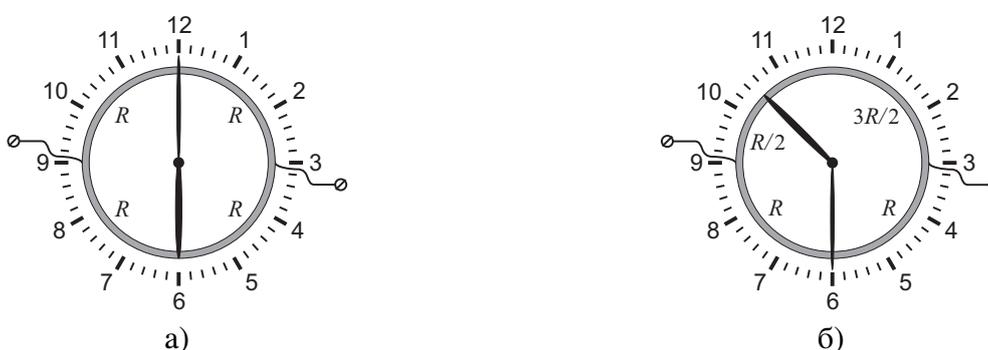


Рис. 9.2.

Решение: Пусть R — сопротивление части реостата, соответствующей четверти дуги окружности (например, между «6» и «9»). Тогда, если часы показывают 6:00 (рис. 9.2а), цепь эквивалентна четырём резисторам с сопротивлением R каждый, соединённым попарно параллельно. Сопротивление каждой такой пары равно $R/2$, а общее сопротивление цепи, следовательно, равно $R/2 + R/2 = R$. Когда же часы показывают 10:30 (рис. 9.2б), цепь так же эквивалентна двум парам параллельно соединённых резисторов: первая пара состоит из резисторов с сопротивлением $R/2$ и R , вторая пара — $3R/2$ и R . Общее сопротивление такой цепи равно

$$R_2 = \frac{R/2 \cdot R}{R/2 + R} + \frac{3R/2 \cdot R}{3R/2 + R} = \frac{R}{3} + \frac{3R}{5} = \frac{14R}{15}.$$

Так как по условию задачи общее сопротивление цепи в первом случае равно 30 Ом, то $R = 30$ Ом. Поэтому $R_2 = 14R/15 = 28$ Ом.

Критерии:

- Записано выражение для общего сопротивления цепи в первом случае 3 балла
- Записано выражение для общего сопротивления цепи во втором случае 5 баллов
- Найдено значение сопротивления во втором случае 2 балла

Задача 9.2. Тень от домика.

Экспериментатор Иннокентий Иванов как-то решил сделать новую крышу для своего дачного домика. В процессе работы он обратил внимание на то, что тень, которую отбрасывает на землю дом без крыши, на 20 см короче, чем тень от дома с новой крышей. Какова высота дачного домика (вместе с новой крышей), если остальные размеры указаны на рис. 9.3? Считать, что скаты крыши симметричны, солнечные лучи в обоих случаях падали в плоскости рисунка под углом 30° к горизонту, а поверхность земли рядом с домиком горизонтальна.

Ответ: 5,35 м.

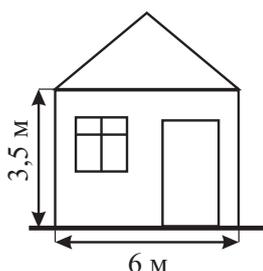


Рис. 9.3.

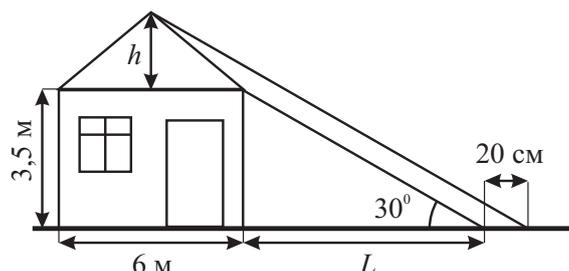


Рис. 9.4.

Решение: Пусть дом без крыши отбрасывает тень длиной L (см. рис. 9.4). Тогда дом с новой крышей (высота крыши h), будет отбрасывать тень длиной $L + 0,2$ м, если считать от правой стены дома. Запишем геометрические соотношения:

$$\frac{3,5 \text{ м}}{L} = \operatorname{tg} 30^\circ, \quad \frac{h + 3,5 \text{ м}}{3 \text{ м} + L + 0,2 \text{ м}} = \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Во втором случае 3 м добавляются, так как конёк крыши находится над серединой дома. Преобразуя эти соотношения, получаем

$$\begin{cases} 3,5 \text{ м} = L \operatorname{tg} 30^\circ, \\ h + 3,5 \text{ м} = (3 \text{ м} + L + 0,2 \text{ м}) \operatorname{tg} 30^\circ \end{cases} \Rightarrow h = (3 \text{ м} + 0,2 \text{ м}) \operatorname{tg} 30^\circ = 3,2 \text{ м} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1,85 \text{ м}.$$

Общая высота дома с крышей равна, соответственно, $H = 3,5 \text{ м} + 1,85 \text{ м} = 5,35 \text{ м}$.

Критерии:

- Записано геометрическое соотношение для тени дома без крыши 2 балла
- Записано геометрическое соотношение для тени дома с крышей 5 баллов
- Найдена высота дома с крышей 3 балла

Задача 9.3. Неравное давление.

Горизонтальный стержень постоянного сечения, левая треть которого изготовлена из чугуна, а правые две трети — из алюминия, опирается своими концами на две опоры. С какой силой стержень давит на левую опору, если на правую он давит с силой 143 Н? Плотность чугуна равна 7 г/см^3 , плотность алюминия — $2,7 \text{ г/см}^3$.

Ответ: 229 Н.

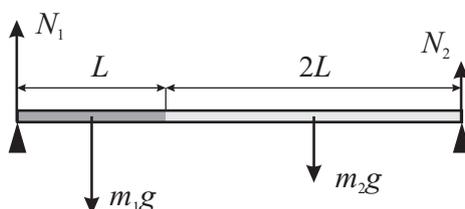


Рис. 9.5.

Решение: Пусть L — длина чугунной части, $2L$ — длина алюминиевой, а S — площадь поперечного сечения стержня. Тогда массы обеих частей равны, соответственно, $m_1 = \rho_{\text{ч}}SL$ и $m_2 = \rho_{\text{ал}}S \cdot 2L$. Изобразим все силы, действующие на стержень (рис. 9.5). Здесь N_1 и N_2 — силы реакции левой и правой опоры. Стержень будет в равновесии, если

$$N_1 + N_2 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow N_1 + N_2 = (\rho_{\text{ч}} + 2\rho_{\text{ал}})SLg.$$

Теперь запишем правило моментов относительно левой опоры:

$$N_2 \cdot 3L = m_1 g \cdot 0,5L + m_2 g \cdot 2L \Rightarrow N_2 = \frac{1}{6} (\rho_{\text{ч}} + 8\rho_{\text{ал}}) SLg.$$

Из полученных соотношений находим, что

$$N_1 = \frac{1}{6} (5\rho_{\text{ч}} + 4\rho_{\text{ал}}) SLg \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{5\rho_{\text{ч}} + 4\rho_{\text{ал}}}{\rho_{\text{ч}} + 8\rho_{\text{ал}}} = \frac{5 \cdot 7 \text{ г/см}^3 + 4 \cdot 2,7 \text{ г/см}^3}{7 \text{ г/см}^3 + 8 \cdot 2,7 \text{ г/см}^3} = \frac{45,8}{28,6}.$$

Отсюда следует, что

$$N_1 = \frac{45,8}{28,6} N_2 = \frac{45,8}{28,6} \cdot 143 \text{ Н} = 229 \text{ Н}.$$

Критерии:

Записаны выражения для масс обеих частей	1 балл
Изображены все силы, действующие на стержень	2 балла
Записано правило моментов относительно любой точки	3 балла
Записано условие равенства сил <i>или</i> правило моментов относительно другой точки	2 балла
Найдена величина N_1	2 балла

Задача 9.4. Брусок в мерном сосуде.

В мерном сосуде с водой находится деревянный брусок, привязанный с помощью лёгкой нити ко дну (см. рис. 9.6а). Нить аккуратно перерезают, и брусок всплывает (рис. 9.6б). Определите с помощью рисунков объём бруска, если он имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдите массу бруска и силу натяжения нити в первом случае. Плотность воды равна 1000 кг/м^3 , ускорение свободного падения — 10 Н/кг .

Ответ: 30 см^3 , 15 г , $0,05 \text{ Н}$.

Решение: Пусть V — объём бруска. На рис. 9.6а брусок погружен на две трети своего объёма, на рис. 9.6б — наполовину (это можно определить по шкале мерного сосуда). Из этого следует, что при всплытии объём погруженной части уменьшился на $2V/3 - V/2 = V/6$. С другой стороны, уровень воды снизился от отметки 140 мл до 135 мл . Это значит, что $V/6 = 5 \text{ мл}$, откуда

$$V = 30 \text{ мл} = 30 \text{ см}^3.$$

Теперь найдём плотность дерева. На рис. 9.6б он плавает, погружившись в воду на половину своего объёма. Следовательно,

$$\rho_{\text{д}} g V = \rho_{\text{в}} g \frac{V}{2} \Rightarrow \rho_{\text{д}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{в}} = 500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Масса бруска равна $m = \rho_{\text{д}} V = 0,5 \text{ г/см}^3 \cdot 30 \text{ см}^3 = 15 \text{ г}$.

Вернёмся теперь к рис. 9.6а. Сила натяжения нити T равна разнице силы Архимеда и силы тяжести, действующих на брусок:

$$T = F_{\text{А}} - mg = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{2V}{3} g - mg = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 0,02 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} - 0,015 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = 0,05 \text{ Н}.$$

Критерии:

Указано, что в первом случае брусок погружен на $2/3$ объёма 1 балл

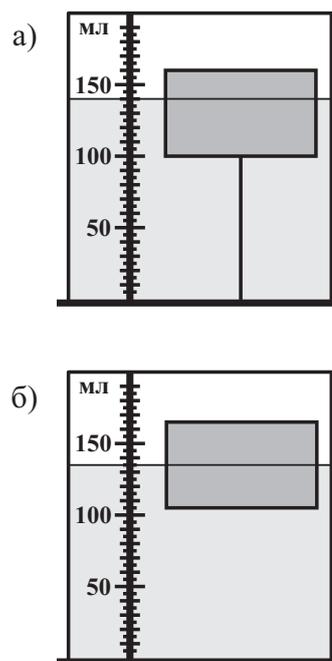


Рис. 9.6.

Указано, что во втором случае брусок погружен на 1/2 объёма	1 балл
Найден объём бруска	2 балла
Найдена плотность дерева	2 балла
Найдена масса бруска	1 балл
Найдена сила натяжения нити	3 балла

Задача 9.5. Зима близко!

Как-то под Новый год девятиклассник Паша, изучая тепловые явления, налил в теплоизолированный калориметр воду при температуре 20°C и довёл её до кипения с помощью встроенного нагревателя за 5 мин. Затем он повторил свой опыт, набрав в калориметр такой же объём снега при температуре –20°C. Во втором случае содержимое калориметра закипело через 5,5 мин. Найдите среднюю плотность снега в калориметре. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · °C), льда — 2100 Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда — 340 кДж/кг.

Примечание: Снег состоит из кристалликов льда, между которыми есть воздушные полости.

Ответ: $\approx 460 \text{ кг/м}^3$.

Решение: Пусть V — объём воды в калориметре, P — мощность нагревателя, ρ_c — средняя плотность снега, а ρ_v — плотность воды. Масса снега, $m_c = \rho_c V$, равна массе льда, из которого он состоит. Запишем уравнения теплового баланса. Для первого случая

$$c_v \rho_v V (100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = P \cdot 5 \text{ мин},$$

а для второго

$$c_l \rho_c V (0^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})) + \lambda \rho_c V + c_v \rho_c V (100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) = P \cdot 5,5 \text{ мин}.$$

Поделив эти равенства друг на друга, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\rho_c}{\rho_v} \cdot \frac{c_l \cdot 20^\circ\text{C} + \lambda + c_v \cdot 100^\circ\text{C}}{c_v \cdot 80^\circ\text{C}} = 1,1 \quad \Rightarrow \quad \rho_c = 1,1 \rho_v \cdot \frac{c_v \cdot 80^\circ\text{C}}{c_l \cdot 20^\circ\text{C} + \lambda + c_v \cdot 100^\circ\text{C}} = \\ = 1100 \text{ кг/м}^3 \cdot \frac{4200 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)} \cdot 80^\circ\text{C}}{2100 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)} \cdot 20^\circ\text{C} + 340000 \text{ Дж/кг} + 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)} \cdot 100^\circ\text{C}} \approx 460 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \end{aligned}$$

Критерии:

Записано уравнение теплового баланса в первом случае	3 балла
Записано уравнение теплового баланса во втором случае	4 балла
Найдено значение плотности снега	3 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Бах!

Молот массой 15 кг падает на лежащую на наковальне стальную пластину массой 300 г. Скорость молота перед ударом равна 10 м/с. Считая, что на нагревание пластины уходит 20% кинетической энергии молота, вычислите, на сколько градусов нагреется пластина после тридцати таких ударов. Удельная теплоёмкость стали равна 500 Дж/(кг · °C).

Ответ: 30 °C.

Решение: Кинетическая энергия молота перед ударом равна $E = Mv^2/2$, где M — масса молота, v — его скорость. После $N = 30$ ударов на нагревание, согласно условию, ушло $Q = 0,2 \cdot N M v^2/2$. Тогда

$$Q = c_{ст} m \Delta t \Rightarrow 0,2 \cdot \frac{N M v^2}{2} = c_{ст} m \Delta t,$$

где m — масса пластины, а Δt — общее изменение температуры. Отсюда получаем, что

$$\Delta t = \frac{0,2 \cdot N M v^2}{2 c_{ст} m} = \frac{0,2 \cdot 30 \cdot 15 \text{ кг} \cdot (10 \text{ м/с})^2}{2 \cdot 500 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)} \cdot 0,3 \text{ кг}} = 30 \text{ °C}.$$

Критерии:

Записано выражение для энергии, переданной пластине (с учётом КПД)	4 балла
Записано уравнение теплового баланса	2 балла
Найдено изменение температуры	4 балла

Задача 10.2. Недалёкое будущее.

Маленькая ракета взлетающая с Луны, поднимается вверх с ускорением 3 м/с². Через 40 с после начала движения от неё отделяются пустые топливные баки. Через какое время после этого они упадут обратно на поверхность Луны? Ускорение свободного падения равно 1,6 м/с². Считать, что баки отделяются без толчка.

Ответ: ≈ 168 м.

Решение: Пусть a — ускорение ракеты, g — ускорение свободного падения, τ — время после старта, через которое отделились баки, t — время, через которое они после этого упали на поверхность. Через время τ скорость ракеты станет $v = a\tau$, а сама ракета поднимется на высоту $h = a\tau^2/2$. После отделения баки имеют ту же скорость v , направленную вверх. Так как через время t баки должны возвратиться на поверхность

$$0 = h + vt - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow 0 = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$t = \frac{\tau \left(a \pm \sqrt{a^2 + ag} \right)}{g}.$$

В этом выражении берём знак «плюс», чтобы выбрать положительное решение. В итоге,

$$t = \frac{\tau \left(a + \sqrt{a^2 + ag} \right)}{g} = 40 \text{ с} \cdot \frac{3 \text{ м/с}^2 + \sqrt{(3 \text{ м/с}^2)^2 + 3 \text{ м/с}^2 \cdot 1,6 \text{ м/с}^2}}{1,6 \text{ м/с}^2} \approx 168 \text{ м}.$$

Критерии:

Найдена высота подъема ракеты h через время τ	1 балл
----------------------------------------------------------------	--------

Найдена скорость ракеты v через время τ	1 балл
Указано, что скорость баков сразу после отделения равна v	2 балла
Записана формула $0 = h + vt - gt^2/2$ или её аналог	3 балла
Найдено время t	3 балла

Задача 10.3. Переключатель мощности.

Цепь, изображённая на рис. 10.1, состоит из источника постоянного напряжения, двух резисторов и реостата. Сопротивление левого резистора в четыре раза меньше, чем сопротивление правого. Если движок реостата находится в таком положении, как показано на рис. 10.1а, мощность, выделяющаяся на левом резисторе, равна 9 Вт, а на правом — 4 Вт. Какие мощности будут выделяться на резисторах, если движок реостата переместить в положение, изображённое на рис. 10.1б? Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Для удобства на рисунках реостат разделён на равные по длине части.

Ответ: На левом резисторе — 4 Вт, на правом — 5,76 Вт.

Решение: На рис. 10.1 реостат разделён на три равные части. Обозначим r сопротивление одной такой части. Токи через левый и правый резисторы в первом случае равны $I_{л1} = U/(R + r)$ и $I_{п1} = U/(4R + 2r)$, а мощности, выделяющиеся на них, выражаются следующими формулами:

$$P_{л1} = I_{л1}^2 R = \frac{U^2 R}{(R + r)^2}, \quad P_{п1} = I_{п1}^2 \cdot 4R = \frac{4U^2 R}{(4R + 2r)^2} = \frac{U^2 R}{(2R + r)^2}.$$

Так как по условию $P_{л1} = 9$ Вт, $P_{п1} = 4$ Вт,

$$\frac{P_{л1}}{P_{п1}} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{(2R + r)^2}{(R + r)^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{2R + r}{R + r} = \frac{3}{2} \Rightarrow r = R.$$

Во втором случае $I_{л2} = U/(R + 2r) = U/(3R)$ и $I_{п2} = U/(4R + r) = U/(5R)$,

$$P_{л2} = I_{л2}^2 R = \frac{U^2}{9R}, \quad P_{п2} = I_{п2}^2 \cdot 4R = \frac{4U^2}{25R}.$$

Так как $P_{л1} = U^2/(4R) = 9$ Вт, получаем, что

$$P_{л2} = \frac{4}{9} P_{л1} = 4 \text{ Вт}, \quad P_{п2} = \frac{16}{25} P_{п1} = 5,76 \text{ Вт}.$$

Критерии:

Записаны выражения для токов через резисторы в первом случае	1 балл
Записаны выражения для мощностей в первом случае	2 балла
Записаны выражения для токов через резисторы во втором случае	1 балл
Записаны выражения для мощностей во втором случае	2 балла
Найдено сопротивление части реостата (или всего реостата)	2 балла
Найдены мощности в втором случае	2 балла

Задача 10.4. Тянем быстрее.

Если брусок массой $m = 8$ кг, лежащий на горизонтальной поверхности, тянуть с постоянной горизонтальной силой $F = 60$ Н, он переместится на некоторое заданное расстояние вдвое быстрее, чем если бы его тянули с силой $F/2$. Каков коэффициент трения между бруском и плоскостью? Брусок в начальный момент покоился. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь.

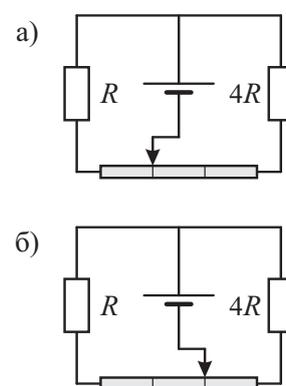


Рис. 10.1.

Ответ: 0,25.

Решение: Пусть μ — коэффициент трения между бруском и поверхностью, а s — расстояние, на которое перемещается брусок. Так как в обоих случаях начальная скорость бруска нулевая

$$s = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

где a_1 и a_2 — ускорения бруска, t_1 и t_2 — время его движения в обоих случаях. Поскольку $t_2 = 2t_1$, отношение ускорений равно $a_1/a_2 = 4$. Найдём теперь эти ускорения:

$$ma_1 = F - \mu mg \Rightarrow a_1 = \frac{F}{m} - \mu g,$$

$$ma_2 = \frac{F}{2} - \mu mg \Rightarrow a_2 = \frac{F}{2m} - \mu g.$$

Отсюда получаем, что

$$a_1 = 4a_2 \Rightarrow \frac{F}{m} - \mu g = 4 \left(\frac{F}{2m} - \mu g \right) \Rightarrow \mu = \frac{F}{3mg} = \frac{60 \text{ Н}}{3 \cdot 8 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 0,25.$$

Критерии:

Найдено отношение ускорений в первом и втором случае	3 балла
Найдено выражение для a_1	2 балла
Найдено выражение для a_2	2 балла
Найдено коэффициент трения	3 балла

Задача 10.5. Пластик бывает разный!

Два груза одинакового объёма, но сделанные из разных видов пластика, повесили на однородном рычаге, опустив их в масло. Если это сделать так, как показано на рис. 10.2а, то система окажется в равновесии, когда оба груза погружены в воду наполовину. Если же их перевесить так, как изображено на рис. 10.2б, равновесие наступит, когда правый груз погружен полностью, а левый — только на одну пятую своего объёма. Определите плотности материалов, из которых сделаны грузы. Для удобства рычаг на рисунке разделён на равные по длине части. Плотность масла равна 900 кг/м^3 .



Рис. 10.2.

Ответ: 840 кг/м^3 , 1230 кг/м^3 .

Решение: Пусть $\rho_{\text{л}}$ — плотность левого груза, $\rho_{\text{п}}$ — плотность правого, V — объём груза. Вёсы грузов в первом случае равны

$$P_{\text{л1}} = \rho_{\text{л}} V g - \rho_{\text{м}} g \frac{V}{2} = \left(\rho_{\text{л}} - \frac{\rho_{\text{м}}}{2} \right) V g, \quad P_{\text{п1}} = \rho_{\text{п}} V g - \rho_{\text{м}} g \frac{V}{2} = \left(\rho_{\text{п}} - \frac{\rho_{\text{м}}}{2} \right) V g,$$

а во втором —

$$P_{\text{л2}} = \rho_{\text{л}} V g - \rho_{\text{м}} g \frac{V}{5} = \left(\rho_{\text{л}} - \frac{\rho_{\text{м}}}{5} \right) V g, \quad P_{\text{п2}} = \rho_{\text{п}} V g - \rho_{\text{м}} g V = \left(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{м}} \right) V g.$$

Запишем правило моментов относительно точки подвеса в обоих случаях (x — длина одного деления на рычаге):

$$\begin{aligned} \begin{cases} P_{л1} \cdot 2x = P_{п1} x, \\ P_{л2} x = P_{п2} \cdot 2x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (\rho_{л} - \rho_{м}/2) V g \cdot 2x = (\rho_{п} - \rho_{м}/2) V g x, \\ (\rho_{л} - \rho_{м}/5) V g x = (\rho_{п} - \rho_{м}) V g \cdot 2x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2\rho_{л} - \rho_{м} = \rho_{п} - \rho_{м}/2, \\ \rho_{л} - \rho_{м}/5 = 2\rho_{п} - 2\rho_{м}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая получившуюся систему, находим, что

$$\rho_{л} = \frac{14}{15} \rho_{м} = 840 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_{п} = \frac{41}{30} \rho_{м} = 1230 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Критерии:

- Записаны выражения для весов грузов в первом случае 2 балла
- Записаны выражения для весов грузов во втором случае 2 балла
- Записано правило моментов в обоих случаях 2 балла
- Записана правильная система для нахождения плотностей 2 балла
- Найдены плотности грузов 2 балла

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Гелий с подогревом.

В теплоизолированном сосуде объёмом 10 л, содержащем гелий при температуре 27 °С и давлении 100 кПа, находится электрический нагреватель. До какой температуры нагреется газ, если нагреватель на 1 мин подключить к источнику с постоянным напряжением 24 В? Каким станет при этом давление гелия в сосуде? Сопротивление нагревателя равно 36 Ом. Объёмом нагревателя можно пренебречь.

Ответ: до 219 °С = 492 К, 164 кПа.

Решение: Так как объём сосуда не меняется, теплота, подводимая к газу, идёт на увеличение его внутренней энергии. Количество теплоты Q , отданное нагревателем, равно $Q = U^2 t/r$, где U — напряжение источника, r — сопротивление нагревателя, а t — время нагревания:

$$Q = \frac{U^2 t}{r} = \frac{(24 \text{ В})^2 \cdot 60 \text{ с}}{36 \text{ Ом}} = 960 \text{ Дж.}$$

С другой стороны, $Q = 3/2 \cdot \nu R(T - T_0)$, где ν — количество вещества, R — универсальная газовая постоянная, T — конечная температура гелия, $T_0 = 300 \text{ К}$ — начальная температура гелия. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, $p_0 V = \nu R T_0$ (p_0 — начальное давление гелия в сосуде, V — объём сосуда), поэтому

$$Q = \frac{3}{2} \nu R(T - T_0) = \frac{3 p_0 V}{2 T_0} (T - T_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = T_0 \left(1 + \frac{2Q}{3 p_0 V} \right) = 300 \text{ К} \left(1 + \frac{2 \cdot 960 \text{ Дж}}{3 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 10^{-2} \text{ м}^3} \right) = 492 \text{ К} = 219 \text{ °С.}$$

Давление, получившееся после нагревания, равно

$$p = p_0 \cdot \frac{T}{T_0} = 164 \text{ кПа.}$$

Критерии:

Найдено количество теплоты, отданное нагревателем	2 балла
Записано 1-ое начало термодинамики для изохорного процесса	2 балла
Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для начального состояния	2 балла
Найдена конечная температура	2 балла
Найдено конечное давление	2 балла

Задача 11.2. Кантование куба.

Рабочие пытаются опрокинуть лежащий на шероховатой горизонтальной поверхности однородный куб массой m , привязав трос к его верхнему ребру. С какой минимальной силой F им нужно тянуть трос в тот момент, когда нижняя грань куба составляет угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтальной поверхностью (см. рис. 11.1)? Считать, что трос в этот момент тоже горизонтален, а куб по поверхности не проскальзывает.

Ответ: $mg/(2\sqrt{3})$.

Решение: Изобразим силы, действующие на куб (рис. 11.2). Здесь N — сила реакции опоры, $F_{\text{тр}}$ — сила трения между ребром куба и поверхностью, а точка C — центр куба. Диагональ куба OC наклонена к горизонтали под углом $\alpha + 45^\circ = 60^\circ$. Запишем правило моментов относительно точки O :

$$mg \cdot OC \cos 60^\circ = F \cdot 2 \cdot OC \sin 60^\circ.$$

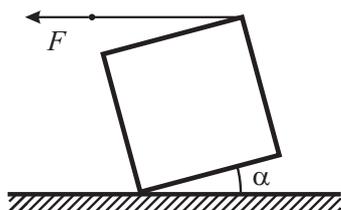


Рис. 11.1.

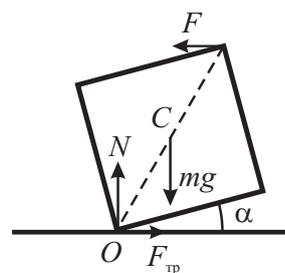


Рис. 11.2.

Отсюда получается, что

$$F = \frac{mg}{2 \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{mg}{2\sqrt{3}}.$$

Критерии:

Изображены все силы, действующие на куб	2 балла
Найден угол между диагональю и поверхностью (или аналог)	2 балла
Записано правило моментов	4 балла
Найдена сила F	2 балла

Задача 11.3. Проверять надо!

Как-то раз мальчик Паша решил зарядить конденсатор ёмкостью C . Для этого он взял батарейку с ЭДС, равной \mathcal{E} , и подсоединил конденсатор к ней. Однако Паша не учёл два обстоятельства: во-первых, конденсатор уже был заряжен до напряжения $\mathcal{E}/2$, а во-вторых, при соединении «плюс» конденсатора оказался соединён с «минусом» батарейки. Какой заряд протечёт через батарейку в процессе перезарядки конденсатора? Какое количество теплоты выделится при этом в цепи?

Ответ: $\Delta q = 3C\mathcal{E}/2, Q = 9C\mathcal{E}^2/8$.

Решение: Начальный заряд на конденсаторе равен $q_0 = C\mathcal{E}/2$. Если конденсатор подключить к батарейке с ЭДС \mathcal{E} , его заряд станет $q = C\mathcal{E}$. Заряд, который протечёт через батарейку, равен изменению заряда на конденсаторе $\Delta q = q_0 + q = 3C\mathcal{E}/2$ (знак «плюс» связан с изменением полярности конденсатора). Начальная и конечная энергии конденсатора равны, соответственно, $W_1 = C\mathcal{E}^2/8$ и $W_2 = C\mathcal{E}^2/2$, а работа источника $A = \Delta q\mathcal{E} = 3C\mathcal{E}^2/2$. Эта работа идёт на изменение энергии конденсатора и тепло:

$$A = (W_2 - W_1) + Q \Rightarrow \frac{3C\mathcal{E}^2}{2} = \left(\frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C\mathcal{E}^2}{8} \right) + Q \Rightarrow Q = \frac{9C\mathcal{E}^2}{8}.$$

Критерии:

Найдены начальный и конечный заряды конденсатора	1 балл
Найден заряд, прошедший через батарейку	1 балл
Найдены начальная и конечная энергии конденсатора	1 балл
Найдена работа источника	2 балла
Записано уравнение $A = (W_2 - W_1) + Q$	3 балла
Найдено значение Q	2 балла

Задача 11.4. Тянем и отпускаем.

Брусок массой $m = 2,5$ кг, лежащий на горизонтальной поверхности, тянут направо, прикладывая к нему горизонтальную силу $F = 40$ Н (см. рис. 11.3). Через время τ после начала движения действие силы прекращается, и после этого ещё через время 4τ брусок останавливается. Каков коэффициент трения между бруском и плоскостью? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с², сопротивлением воздуха пренебречь.



Рис. 11.3.

Ответ: 0,32.

Решение: Пусть μ — коэффициент трения между бруском и горизонтальной поверхностью. Во время разгона на брусок (в горизонтально направлении) действуют две силы — сила F и сила трения $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Найдём скорость бруска v в конце разгона:

$$\begin{cases} ma_1 = F - \mu mg, \\ a_1 = (v - 0)/\tau \end{cases} \Rightarrow v = \left(\frac{F}{m} - \mu g \right) \tau.$$

Торможение бруска проходит только под действием силы трения, поэтому

$$\begin{cases} ma_2 = -\mu mg, \\ a_2 = (0 - v)/(4\tau) \end{cases} \Rightarrow v = 4\mu g\tau.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\frac{F}{m} - \mu g \right) \tau = 4\mu g\tau \Rightarrow \mu = \frac{F}{5mg} = \frac{40 \text{ Н}}{5 \cdot 2,5 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 0,32.$$

Критерии:

Записан 2-й закон Ньютона в случае разгона бруска	3 балла
Записан 2-й закон Ньютона в случае торможения	1 балл
Найдены ускорения в обоих случаях	1 балл
Найдена скорость с конце разгона	2 балла
Найдено μ	3 балла

Задача 11.5. Преломление в неизвестной жидкости.

Луч света падает на поверхность раздела воздуха и неизвестной прозрачной жидкости под углом α ($\text{tg } \alpha = 3/5$). Оказалось, что если увеличить угол падения луча на 45° , угол преломления увеличится вдвое. Определите, чему равен показатель преломления неизвестной жидкости.

Ответ: $n = 9/\sqrt{34} \approx 1,54$.

Решение: Пусть β — угол преломления луча, падающего под углом α , а n — показатель преломления неизвестной жидкости. Тогда, по закону Снеллиуса,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

С другой стороны, во втором случае

$$\frac{\sin(\alpha + 45^\circ)}{\sin 2\beta} = n.$$

Приравнивая левые части этих выражений, получаем, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + 45^\circ)}{\sin 2\beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \sin \beta \cos \beta} \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \text{ctg } \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Теперь, используя тригонометрические тождества, находим

$$\sin \alpha = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{9}{\sqrt{34}} \approx 1,54.$$

Критерии:

Записан закон Снеллиуса для первого случая	1 балл
Записан закон Снеллиуса для второго случая	2 балла
Найден $\sin \alpha$	1 балл
Найдено значение любой тригонометрической функции от β	4 балла
Найден $\sin \beta$	1 балл
Найдено значение n	1 балл

Максимально возможный балл в 11 классе 50